Методы подсчета комбинаторных объектов

Александр Голованов, Артем Жук, Александр Останин

Февраль 2015

1 Введение

Зачастую в задачах, попадающихся на олимпиадах, надо что-нибудь подсчитать. Скажем, число способов рассадить n мальчиков и m девочек (все дети и места считаются различными) за круглым столом, да так, чтобы никакие два мальчика не сидели рядом. Или посчитать количество перестановок чисел $1, \ldots, n$ таких, что сумма двух соседних чисел в перестановке не превосходит m. В этой статье мы научимся решать эти и многие другие задачи.

2 Основные понятия

Факториалом натурального числа n будем называть произведение $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$, обозначаемое $n!$. К примеру, $3! = 6$, $6! = 720$. $0!$ будем считать равным 1.

Числом размещений без повторений будем называть количество способов выложить в ряд k предметов из данных n различных и будем обозначать это число за A_n^k $(0 \leqslant k \leqslant n)$. К примеру, $A_n^0 = 1$, $A_n^n = n!$, так как на первое место можно поставить один из n предметов, после того, как он там стоит, на второе место можно поставить один из $(n-1)$ предмета, и так далее. Вообще, такими рассуждениями легко понять, что

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1).$$

Числом сочетаний без повторений будем называть количество способов выбрать k предметов из данных n различных и будем обозначать это число за C_n^k.

Заметим, что если мы хотим поставить в ряд k элементов из данных n различных, то мы можем сначала выбрать эти k элементов, не упорядочивая их (это можно сделать C_n^k способами), а потом выбрать порядок для этих элементов (это можно сделать $k!$ способами). Таким образом,

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}.$$

Теорема. $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^k = C_n^{n-k}$.

Доказательство читателю предлагается провести самому в качестве упражнения на понимание.

Теорема. Если $0 < k \leqslant n$, то $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$.

Доказательство. Заметим, что способы выбрать k элементов среди данных n бывают двух типов: когда мы взяли элемент номер 1, и когда не взяли. Первых способов ровно C_{n-1}^{k-1}, т. к. оставшийся $k-1$ элемент придётся брать из оставшихся $n-1$. Вторых способов ровно C_{n-1}^k по аналогичной причине.

Теорема (Бином Ньютона). $(a+b)^n = a^n + C_n^1 \cdot a^{n-1}b + C_n^2 \cdot a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^{n-1} \cdot ab^{n-1} + b^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i}$.

Доказательство. Рассмотрим искомое произведение:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)\ldots(a+b)}_{n \text{ штук}}.$$

Если раскрыть скобки, получится 2^n слагаемых, каждое из которых имеет вид $a^k b^{n-k}$: это означает, что из каких-то k скобок мы выбрали a, а из остальных — b. Легко видеть, что слагаемое $a^k b^{n-k}$ для какого-то конкретного k встретится ровно C_n^k раз, потому что количество способов выбрать k скобок, из которых мы выберем a в качестве множителя, равно ровно этому. Таким образом мы получили требуемое равенство.

Теорема. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Доказательство №1. В доказательстве предыдущей теоремы мы получили, с одной стороны, 2^n слагаемых, а с другой — $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

Доказательство №2. По предыдущей теореме $2^n = (1+1)^n = C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$.

Доказательство №3. 2^n есть количество способов выбрать произвольный набор элементов из n данных. Это количество, очевидно, равно количеству способов выбрать набор из 0 элементов, из 1 элемента, из 2 элементов, …, из n элементов.

Упражнение. Поймите, что эти три доказательства ничем не отличаются.

Теорема. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$ при $n > 0$.

Доказательство. $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 + \ldots + (-1)^n C_n^n = (1-1)^n = 0$.

Упражнение. Найдите, где мы пользовались в доказательстве, что $n > 0$.

3 Формула включений-исключений

Рассмотрим такую задачу: посчитать количество чисел на отрезке $[1, n]$, которые не делятся ни на одно из чисел $a_1, \ldots, a_m$. Ограничения: $n \leqslant 10^{18}$, $m \leqslant 10$.

С чего начать её решение? Давайте представим, что $m = 1$. Сколько чисел среди $\{1, 2, \ldots, n\}$ делятся на a_1? Очевидно, $\left\lfloor \frac{n}{a_1} \right\rfloor$. Значит, $n - \left\lfloor \frac{n}{a_1} \right\rfloor$ на него не делятся.

Пусть теперь $m = 2$. Среди $\left\lfloor \frac{n}{a_1} \right\rfloor$ $\left\lfloor \frac{n}{a_1} \right\rfloor$ чисел делятся на a_1, $\left\lfloor \frac{n}{a_2} \right\rfloor$ — на a_2. Казалось бы $\left\lfloor \frac{n}{a_1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{a_2} \right\rfloor$ чисел делятся хотя бы на одно из чисел a_1 и a_2, но нет! Числа, которые делятся и на a_1, и на a_2, участвуют в этой сумме дважды, поэтому их количество из этой суммы надо вычесть. Значит, ответ на задачу для $m = 2$ равен $n - \left\lfloor \frac{n}{a_1} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{a_2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{(a_1, a_2)} \right\rfloor$.

В общем виде нашу задачу можно сформулировать так: посчитать, сколько элементов множества U не удовлетворяют ни одному из заданных свойств. Если обозначить за A_i множество элементов, удовлетворяющих свойству i, то наша цель – найти $\left|\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k}\right|$.

Здесь и далее $\overline{A} = U \setminus A$. Оказывается, верна формула включения-исключения:

$$\left|\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_k}\right| = |U| - |A_1| - |A_2| - \cdots - |A_k| + |A_1 \cap A_2| + \ldots + |A_{k-1} \cap A_k| + \cdots + (-1)^k \left|A_1 \cap \cdots \cap A_k\right|.$$

(Знак минус берётся, если пересечение нечетного числа множеств. Иначе знак плюс).

Такой подход применим, когда количество элементов, удовлетворяющих сразу нескольким свойствам, "легко" считается. Докажем эту формулу:

Доказательство. Определим характеристическую функцию χ_A множества A как $\chi_A(x) = 1$ тогда и только тогда, когда $x \in A$, иначе $\chi_A(x) = 0$. Легко видеть, что

$$|A| = \sum_x \chi_A(x)$$

.

$$\chi_{\overline{A}} = 1 - \chi_A,$$

$$\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B.$$

Применяя эти свойства, обнаружим, что

$$\chi_{\overline{A_1 \cup \dots \cup A_k}} = \chi_{\overline{A_1}} \dots \chi_{\overline{A_k}} = (1 - \chi_{A_1}) \dots (1 - \chi_{A_k}).$$

Осталось раскрыть скобки в правой части, применяя правило $\chi_{A \cap B} = \chi_A \chi_B$:

$$\chi_{\overline{A_1 \cup \dots \cup A_k}} = 1 - \chi_{A_1} - \chi_{A_2} - \ldots - \chi_{A_k} + \chi_{A_1 \cap A_2} + \ldots + (-1)^k \chi_{A_1 \cap \dots \cap A_k}$$

И просуммировать это по $x \in U$ (применяя правило $|A| = \sum_{x \in U} \chi_A(x)$).

Наша задача теперь выглядит совсем просто: пусть множество A суть множество чисел от 1 до n, k-е свойство — делимость на a_k. Легко видеть, что число делится на $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$ тогда и только тогда, когда оно делится на НОК чисел $a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}$. Таких чисел на отрезке $[1, n]$ ровно $\left\lfloor \frac{n}{LCM(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})} \right\rfloor$. Итого наша формула выглядит так:

$$answer = \sum_{S \subseteq \mathcal{R}_n} (-1)^{|S|} P(S) = \sum_{S \subseteq \mathcal{R}_n} (-1)^{|S|} \left\lfloor \frac{n}{LCM_{i \in S}(a_i)} \right\rfloor.$$

Это решает задачу за $O(2^m)$, что укладывается в любое разумное ограничение по времени.

4 ФВИ для симметричных свойств

В этой задаче нам приходилось каждый раз считать, чему равно соответствующее $\left\lfloor \frac{n}{LCM(a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k})} \right\rfloor$. В довольно большом числе задач соответствующая величина зависит только от k. Рассмотрим пример, который, скорее всего, Вам никогда не попадётся в жизни: пусть k и $n > 1$ — натуральные числа. Найти количество чисел от 1 до kn, которые сравнимы по модулю n и с 0, и с 1, …, и с $n-1$. Решим эту задачу с помощью ФВИ (хотя всем и так очевидно, что таких чисел не бывает). Пусть $A = \{1, 2, \ldots, kn\}$, i-е свойство числа — не быть сравнимым с i по модулю n (свойств всего n). Пусть $i_1, i_2, \ldots, i_m$ — произвольный набор свойств. Тогда количество чисел, им удовлетворяющих, равно $k(n-m)$. Легко видеть, что это число зависит только от m. Сколько существует наборов свойств мощности m? Это есть количество способов выбрать m-элементное подмножество n-элементного множества, то есть, C_n^m. Таким образом, по ФВИ ответ на задачу равен:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \cdot k(n-i).$$

Сразу же заметим, что

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i = (1-1)^n = 0$$

по биному Ньютона. Найдём теперь следующую сумму:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \cdot i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_n^i \cdot i.$$

Вспомним, что $C_n^k = \frac{n}{k} \cdot C_{n-1}^{k-1}$. Сделав такую замену в искомой сумме, получим:

$$\sum_{i=1}^{n} (-1)^i C_n^i \cdot i = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \frac{n}{i} C_{n-1}^{i-1} \cdot i = \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} nC_n^i = -n \cdot (1-1)^{n-1} = 0.$$

Тогда

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \cdot k(n-i) = kn \cdot 0 - k \cdot 0 = 0.$$

5 Применения ФВИ

Во избежание ощущения, что ФВИ — бесполезная и ненужная вещь, рассмотрим следующую **задачу**:

Сколькими способами можно представить число n в виде суммы целых неотрицательных $x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, каждое из которых не превосходит m? n, m и k фиксированы.

Решение.

Сначала решим более простую задачу — сколькими способами число n можно представить в виде суммы k целых неотрицательных чисел? Легко понять, что таких способов столько же, сколько способов представить число $k + n$ в виде суммы *положительных* чисел, т.к.

$$x_1 + \ldots x_k = n \Leftrightarrow (x_1 + 1) + \cdots + (x_k + 1) = n + k.$$

А таких способов ровно C_{n+k-1}^{k-1}. Обозначим $c(n,k) = C_{n+k-1}^{k-1}$.

Теперь надо справиться с ограничениями сверху. Какие свойства выбрать? Положим i-ое свойство $x_i \geqslant m+1$. Нам нужно посчитать число таких наборов $(x_1, \ldots, x_k)$, для которых все свойства невыполнены. Что же применить?.. ФВИ! Количество наборов, удовлетворяющих t свойствам, есть не что иное, как $c(n-(m+1)t, k)$. Замечая, что свойства симметричны, получаем ответ:

$$\sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i c(n-(m+1)i, i) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i C_k^i C_{n-(m+1)i+i-1}^{i-1}.$$

Разумеется, суммирование нужно вести до $\min\left(k, \left\lfloor \frac{n}{m+1} \right\rfloor\right)$.

Еще одна задача: *Сколько есть наборов из k чисел $(x_1, \ldots, x_k)$, взаимно простых в совокупности (т.е. таких, что НОД$(x_1, \ldots, x_k) = 1$)? При этом $1 \leqslant x_i \leqslant n$.*

План решения будет таким же, как и в предыдущей задаче. Для начала найдём число наборов из k чисел, лежащих на отрезке $[1, n]$. Читатель, должно быть, уже догадался, что таких наборов n^k. А сколько есть наборов, где все числа кратны a? Легко видеть, что их $\lfloor \frac{n}{a} \rfloor^k$.

Рассмотрим все простые числа $p_1, \ldots, p_m$ из отрезка $[1, n]$. Числа из набора $(x_1, \ldots, x_k)$ взаимно просты в совокупности тогда и только тогда, когда НОД$(x_1, \ldots, x_k)$ не делится ни на одно из чисел $p_1, \ldots, p_m$ (в таком случае НОДу ничего не остаётся, как быть равным единице). Итак, ответ есть

$$\sum_{A \subset \{p_1, \ldots, p_m\}} (-1)^{|A|} \left\lfloor \frac{n}{\prod_{x \in A} x} \right\rfloor^k.$$

Но слагаемых тут 2^m, что приемлемо лишь на небольших ограничениях (при $n = 100$, $m = 25$). Можно ли уменьшить число слагаемых? Свойства не симметричны, поэтому подход из предыдущей задачи неприменим. Но помогает другое соображение. А именно, заметим, что нет смысла перебирать множества A, для которых $\prod_{x \in A} x > n$. Но искомых множеств A не больше n (т.к. произведения $\prod_{x \in A} x$ для всех A различны). Теперь в нашей сумме не более n слагаемых. Реализовать такое решение можно рекурсивно.

Рассмотрим ещё одну задачу:

Сколько существует последовательностей длины n, состоящих только из чисел 0, 1, 2; причём каждое число встречается хотя бы один раз?

Решение. Рассмотрим последовательности длины n, состоящие только из чисел 0, 1 и 2. Легко видеть, что их ровно 3^n. Те, в которых есть только числа 0 и 1, нам не подходят: их ровно 2^n. Также нам не подходят последовательности, состоящие только из 1 и 2, а также из 2 и 0. Текущий ответ равен $3^n - 3 \cdot 2^n$. Но последовательности, состоящие только из 0, 1 и 2, мы вычли по 2 раза, и их количества надо прибавить к ответу. Таким образом, ответ на задачу есть

$$3^n - 3 \cdot 2^n + 3.$$

Упражнение. Ответ, который мы получили, очевидно, делится на 3. Попробуйте это доказать, ничего не считая.

Упражнение. Ничего не считая, докажите, что он делится даже на 6.

Заметим, что проведённый только что абзац рассуждений есть не что иное, как формула включений-исключений! Действительно, если говорить строго, то множеством объектов сделаем множество последовательностей длины n, состоящих из чисел от 0 до 2, а k-м свойством ($1 \leqslant k \leqslant 3$) сделаем отсутствие числа $(k-1)$ в последовательности. Тогда по формуле включений-исключений получим:

$$answer = 3^n - 2^n - 2^n - 2^n + 1^n + 1^n + 1^n - 0.$$

Сходство с рассуждениями, проделанными в предыдущем абзаце, разглядеть несложно.

Упражнение. Решите эту задачу для последовательностей из чисел $0, 1, \ldots, m-1$ и докажите, что ответ делится на $m!$ (опять ничего не считая).

Вернёмся к задаче, которая была использована в качестве первого примера задачи на ФВИ для симметричных свойств. В какой-то момент нам пришлось доказывать следующее тождество:

$$\sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i \cdot i = 0.$$

Докажем более общий факт:
Пусть $0 \leqslant m < n$. *Тогда*

$$\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i \cdot i^m = 0.$$

Доказательство. Рассмотрим последовательности длины m, состоящие из чисел от 0 до $n-1$ такие, что каждое число присутствует. Очевидно, их не существует, ведь $n > m$, но мы всё равно посчитаем их количество. Раскроем тайну и воспользуемся ответом из последнего упражнения: по ФВИ для симметричных свойств таких последовательностей ровно

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^i C_n^i \cdot i^m.$$

Итак, чтобы доказать, что какая-то величина равна нулю, мы сделали следующее: предъявили пустое множество, можностью которого эта величина является. Такой, казалось бы, бессмысленно сложный приём часто бывает полезен.

Упражнение. Что будет, если $m = n$?